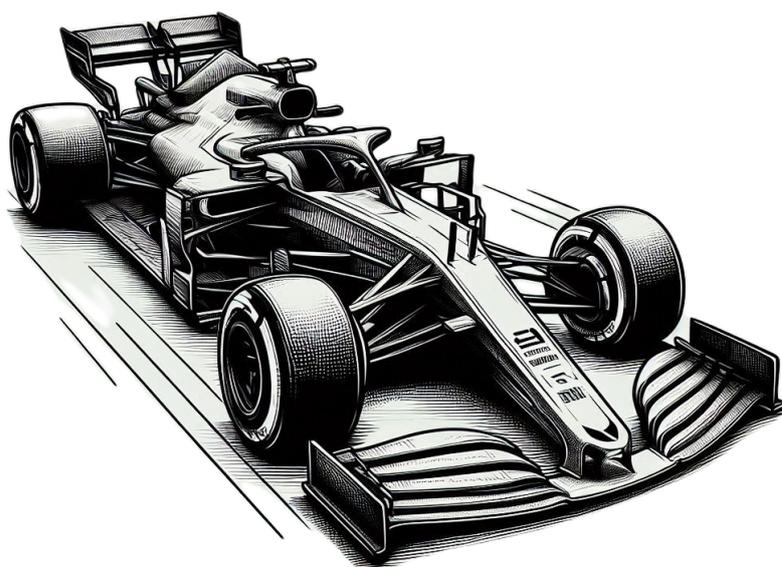




F1

Gran Premio de la UPV

Consideraciones técnicas de la organización



III Olimpiada de Matemática Aplicada a la Fórmula 1

Sábado, 10 de mayo de 2025

Instrucciones.

No está permitido el uso de calculadoras ni dispositivos electrónicos de ningún tipo. Las respuestas deben indicarse en la hoja de resultados de forma clara, de lo contrario no serán evaluadas. No es necesario indicar las magnitudes en la respuesta.

Esta prueba consta de 25 problemas a resolver en un máximo de tiempo de 2 horas y media en las que se calculará un resultado. La participación es anónima y objetiva. Los resultados deberán indicarse en la hoja de respuestas proporcionada, junto con el NIF o NIE y la fecha de nacimiento únicamente, donde no se permitirán tachones ni correcciones con títex, siendo anulada la respuesta en ese caso (se podrá solicitar otra hoja de resultados pero siempre habiendo roto previamente la anterior).

Las soluciones deberán indicarse en bolígrafo de tinta azul o negra y de manera clara y legible. No se admitirán respuestas en lápiz. Sí está permitido el uso de regla, cartabón, escuadra, compás y material de dibujo y para realizar los cálculos se facilitarán los folios necesarios.

Para determinar los ganadores se valorará, en primer lugar, el número de respuestas correctas (todos los problemas tienen la misma puntuación y una pregunta no acertada no puntúa). En caso de empate, se premiará al participante más joven de los empatados. En caso de que estos criterios no fuesen suficientes, la organización se reserva el derecho a decidir el modo de desempatar. Se realizará una doble corrección para evitar cualquier tipo de error ya que los resultados finales serán inapelables.

¡Mucha suerte a todos los participantes!

Nota. Se hace constar que el escenario planteado en esta olimpiada es completamente ficticio y se presenta con el objetivo de enriquecer la experiencia participativa en la OMA 2025. La inclusión de elementos imaginarios, como la mención de la Fórmula 1, se realiza con la intención de fomentar un ambiente más dinámico y entretenido durante el desarrollo del evento. Esta estrategia busca estimular el interés y la participación activa de los estudiantes, contribuyendo así a hacer más atractiva y edificante la experiencia global de la olimpiada. Cualquier referencia a la Fórmula 1 se realiza de manera inventada y no constituye ninguna asociación, afiliación o respaldo por parte de esta a la organización involucrada o cualquier otra entidad mencionada. La Fórmula 1 es una marca registrada y reconocida internacionalmente, utilizada aquí únicamente como un elemento apócrifo dentro del contexto de la prueba presentada.

Problemas a resolver.

Estrategia.

1. A partir de los datos de telemetría de los entrenamientos libres, sabemos que el consumo de gasolina de un monoplace decrecía 2 litros por vuelta. Además, tras 20 vueltas, la gasolina en el depósito era igual a la suma de la gasolina después de completar 35 y 50 vueltas. ¿Cuántos litros de gasolina tenía al inicio de los libres?
2. Para el circuito de la UPV, se estima que la probabilidad de adelantar a otro coche por vuelta en pista teniendo DRS es $p = 0,2$. Bajo estas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que un piloto adelante a otro en menos de 5 vueltas, en tanto por 1 y en formato decimal, tomando la actual como la 0?
3. La degradación de los neumáticos respecto al espacio recorrido es proporcional a la velocidad media. Para una velocidad media constante de 220 km/h, un neumático nuevo dura 100 km hasta alcanzar un desgaste crítico $D(x) = 1$, siendo $0 \leq D(x) \leq 1$ el desgaste en función de los km recorridos, con $D(0) = 0$. Si la velocidad media sube a 250 km/h, ¿cuántos km durarán los neumáticos hasta alcanzar un desgaste crítico?
4. A medida que el neumático se utiliza, aparece *graining* (desgaste irregular) en su superficie. En particular, se observa que cada ciclo de 6 vueltas, el *graining* afecta al segundo quinto y al cuarto quinto de la banda de rodadura del neumático que aún permanece sin desgaste. Si partimos de un neumático libre de desgaste, indica la porción de *graining* que habrá en este después de 24 vueltas. Expresa el resultado como fracción irreducible.
5. La adherencia entre los neumáticos y el asfalto es directamente proporcional al coeficiente de fricción dinámico μ , que supondremos que depende de una variable real $x > 0$ que agrupa la configuración del monoplace y otros factores externos, y que sigue el siguiente modelo:

$$\mu = -\frac{1}{8}(T_s - 100)^2 + 3(R_a - 1) + \frac{1}{2}(F_d - 1),$$

donde

- $T_s = 90 + x$ es la temperatura del asfalto (en grados Celsius),
- $R_a = 1 - \frac{1}{x}$ es un coeficiente adimensional que representa la rugosidad de la pista,
- $F_d = 4 + \frac{x^2}{4}$ es una medida de la carga aerodinámica útil generada por el coche.

En simulación, se estimó que el valor de μ óptimo es de 1,5. ¿Cuál será el valor de x en este caso? Expresa el resultado aproximado con dos cifras decimales, usando que: $\sqrt{5} \approx 2,2$ y $\sqrt{149} \approx 12$.

6. En la ciudad de la carrera, al 90% de los días soleados le siguen días soleados, y al 80% de los días lluviosos le siguen días lluviosos (solo se consideran estos dos estados independientes). Si hace dos días fue soleado, ¿cuál será la probabilidad de que llueva hoy, el día del evento, en tanto por 1 y en formato decimal?
7. La carrera durará 50 vueltas y habrá una sola parada. La edad de los neumáticos en vueltas es a , con $a = 1$ al inicio por la vuelta de formación y $a = 0$ tras el cambio de estos en *boxes*. Los compuestos medios tienen un tiempo de vuelta en segundos de $90 + 0,2a$ y, los duros, de $91 + 0,1a$. Si un equipo inicia con medios y quiere parar lo antes posible, ¿en qué vuelta deben hacer la parada para minimizar el tiempo total? El resultado debe ser un número entero.
Nota. Si paramos en la vuelta n quiere decir que hemos completado n vueltas hasta parar.
8. Para el Gran Premio de la UPV, el piloto Alfonso llega 13 puntos por detrás de Bestappen en el campeonato de pilotos. ¿Cuál es la probabilidad de que Alfonso supere a Bestappen en puntos en dicho campeonato después de la carrera? Expresa el resultado como fracción irreducible.
Nota. Todos los posibles órdenes de llegada a meta de los 20 pilotos son igual de probables.

Diseño del circuito y del monoplaza.

9. El circuito de 6,1 km tendrá 3 zonas rectas, todas zonas de DRS, ocupando entre el 29,7% y el 33% de este (ambos incluidos). La recta principal, que es la más larga, mide 800 m, un 60% más que la más corta. Sabiendo que las rectas son más baratas de construir que las curvas, ¿cuánto mediría, en metros, la segunda zona de DRS más larga en condiciones óptimas?
10. En la ciudad que acogerá el Gran Premio se construirá un circuito urbano. De modo que se debe instalar un sistema de aislamiento acústico para que el nivel de presión sonora (*NPS*) de los edificios cercanos no supere los 45 dB. Sabiendo que la presión sonora de un coche de Fórmula 1 es $p = 125$ Pa, ¿cuál debe ser la atenuación mínima, expresada en decibelios (dB), que debe proporcionar dicho aislamiento? Expresa el resultado aproximado a las unidades.

Nota. El nivel de presión sonora (*NPS*) se define mediante la siguiente expresión:

$$NPS = 10 \log_{10} \left(\frac{p}{p_0} \right)^2,$$

con $p_0 = 20 \cdot 10^{-6}$ Pa la presión de referencia del oído humano y, si $p = 1$ Pa, $NPS = 94$ dB.

11. En la parrilla de salida, el ángulo de visión del semáforo (respecto del suelo) de los pilotos colocados en las posiciones 3 y 11 es de 30° y 15° , respectivamente. Por reglamento, las posiciones en la parrilla están espaciadas equidistantemente, ¿cuál será la tangente del ángulo de visión del piloto en la posición 7? Da la respuesta como fracción irreducible y sin raíces en el denominador.
12. Se ha desarrollado un modelo simplificado que relaciona la eficiencia aerodinámica η de un coche de F1 con el equilibrio entre dos fuentes de carga: el efecto suelo y los alerones. En este modelo, la eficiencia se expresa como la suma de la proporción entre ambas cargas y su inversa. Si llamamos a esta proporción x , indica la eficiencia máxima $\eta(x)$ que se puede lograr sabiendo que, en simulación, se ha obtenido la siguiente limitación: $x^4 + \frac{1}{x^4} \leq 47$.
13. En una curva rápida del circuito de la UPV, que se recorre en 1 segundo, la potencia cinética de frenada del monoplaza (en valor absoluto y J/s) se estima como: $p(t) = \frac{800\,000}{(1+t^2)^2}$. Sabiendo que el MGU-K permite recuperar el 20% de la energía cinética disipada en las frenadas, ¿cuánta energía eléctrica almacenará el coche en esta curva? Expresa el resultado exacto en kJ.

Nota. La ecuación que relaciona energía con potencia para un tiempo T en segundos es:

$$E = \int_0^T p(t) dt$$

14. Un fertilizante especial para el césped con una mezcla de nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K) funciona de la mejor forma cuando las cantidades de estos (en gramos) son números primos y las siguientes ecuaciones $N - 2 \cdot P = K$ y $N \cdot K + P^2 = 676$ se cumplen por cada 100 gramos de fertilizante. ¿Cuál es el porcentaje de nitrógeno necesario, expresado en tanto por 100?
15. Un equipo de ingenieros está intentando comunicarse con su piloto vía radio, sin éxito. Uno de los operarios se da cuenta que el sistema está mal calibrado, por lo que prueban la comunicación por diferentes canales, apuntándolos uno por uno, hasta encontrar el canal donde se encuentra el piloto. Las frecuencias centrales de los 4 primeros canales anotadas por el equipo son:

$$f_1 = 400 \text{ MHz}, \quad f_2 = 430 \text{ MHz}, \quad f_3 = 445 \text{ MHz}, \quad f_4 = 452,5 \text{ MHz}.$$

Sabiendo que las frecuencias centrales de los canales restantes siguen el mismo patrón que las anotadas, determina la frecuencia central del canal 33 (f_{33}) en MHz.

Nota. Toma $\left(\frac{1}{2}\right)^n \approx 0$ para valores de n superiores a 10.

16. Los ingenieros de un equipo buscan mejorar la aerodinámica del coche mediante deflectores con forma de triángulo escaleno ABC , siendo $AB = 70$ cm, $AC = 80$ cm y $BC = 90$ cm. Para ello, se aplica una fuerza de doblado sobre un eje DE , con D situado en el lado AC , $AD = 20$ cm, E en el lado BC y $BE = 30$ cm. El fabricante coloca una pegatina ocupando toda la zona $ABED$. ¿Cuál es el cociente entre su área y la del resto del deflector (la zona DEC)?

Nota. Los vértices A , B y C están colocados en sentido **horario**.

17. Durante la sesión de entrenamientos libres, los ingenieros detectan que el coche es más lento de lo esperado y deciden cambiar el alerón delantero. Esta pieza solo influye en un 10 % del tiempo total que realiza el coche por vuelta. Con el nuevo alerón, el tiempo se reduce en 0,5 segundos respecto a un tiempo inicial de 1:30.000 por vuelta. ¿Cuál es el factor de mejora del nuevo alerón delantero respecto al anterior? Expresa el resultado como fracción irreducible.

Nota. La ley de Amdahl estima la mejora global de un sistema al optimizar solo una parte:

$$S = \frac{1}{(1 - P) + \frac{1}{k}P},$$

donde

- S es el factor de mejora global del sistema (el monoplaza).
- P es la proporción del sistema que se beneficia del cambio.
- k es el factor de mejora del componente optimizado (el alerón delantero).

Economía, Finanzas y Marketing.

18. Un inversor estima que las acciones de una escudería subirán un 8 % a largo plazo. Con un precio actual de 100 € la acción y una probabilidad de éxito del 55 %, ¿qué porcentaje de su capital debería invertir según el criterio de Kelly, dado por $f^* = \frac{bp-q}{b}$, donde b es el factor de multiplicación del capital en caso de éxito, p la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$? Expresa el resultado en tanto por 100 y aproximado con dos cifras decimales.
19. Para que el Gran Premio tenga una buena acogida, se diseña un cartel con forma de rectángulo áureo, el cual dota a las imágenes de equilibrio y armonía. Los lados del rectángulo, a y b , cumplen que $\frac{a}{b} = \phi$, siendo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el número áureo. Determina el lado b , en metros, sabiendo que el valor del lado a , en metros, viene dado por la siguiente ecuación:

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = a.$$

20. La tienda oficial de un equipo vende semanalmente 600 gorras a 50 € cada una. Observan que, de media, si el precio por gorra aumenta 5 €, las ventas se reducen en 50 unidades, y viceversa. ¿Cuál es el precio óptimo de cada gorra en euros para maximizar sus ingresos?
21. Sea P un polinomio de coeficientes enteros de grado mayor que 2 que modela (en miles) el número de entradas vendidas para el Gran Premio de la UPV hasta que estas se agotan. La variable de entrada del polinomio es el número de semanas transcurridas desde que se pusieron a la venta (es un entero no negativo). En la semana 2 se vendieron 11 000 entradas, y en la semana 6 se vendieron 7 000, ¿para qué semana se prevé que no queden entradas?
22. En una ciudad con 1000 aficionados a la Fórmula 1, 100 de ellos compraron entradas y asistieron al Gran Premio de su ciudad en 2023. Se ha visto que el 20 % de los aficionados que asisten al GP no vuelven a asistir al del siguiente año, mientras que el 30 % de los que no asisten sí deciden acudir. ¿Cuántos aficionados se espera que asistan al Gran Premio de 2025 en dicha ciudad?

Rutina y logística del personal.

23. En cierto momento de la carrera, la aguja minutería del reloj está 10 minutos por detrás de la horaria. ¿Cuántos minutos pasarán hasta que esté 12 minutos por delante?
24. En un equipo de Fórmula 1 se registra cada día el orden de llegada al trabajo de cinco ingenieros. Considerándolo aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que el día de la carrera ninguno repita la posición de llegada del día anterior? Expresa el resultado como fracción irreducible.
25. La sangre tarda aproximadamente un segundo en fluir por un capilar sanguíneo de 1 mm de longitud. Si el diámetro es de $6 \mu\text{m}$ y la caída de presión es de 2,4 kPa, ¿cuál es la viscosidad de la sangre de un piloto sano en mPa·s, suponiendo flujo laminar, expresada en formato decimal?
- Nota.** Ley de Poiseuille: $\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} I_v$, siendo η la viscosidad e $I_v = \frac{dV}{dt}$ el caudal.

ANEXO

Introducción a la Fórmula 1.

La **Fórmula 1** es la **máxima categoría del automovilismo mundial**. Cada año, **20 pilotos** compiten en 24 carreras repartidas por distintos países de todo el mundo, con el objetivo de sumar la mayor cantidad de puntos y convertirse en el campeón del mundo. Los pilotos están divididos en 10 equipos, conocidos como escuderías, que también luchan entre sí por otro título muy importante: el campeonato de constructores, que premia al mejor equipo del año. Más allá de la velocidad, la F1 es una mezcla de estrategia, tecnología y habilidad al volante, donde cada detalle cuenta y cada carrera puede cambiarlo todo.

Como ya se ha comentado, a lo largo de la temporada se disputan dos campeonatos paralelos: uno para pilotos y otro para constructores (equipos). Ambos títulos se definen por un sistema de puntos que se otorgan al finalizar cada carrera. Las carreras se desarrollan en circuitos de entre 3,5 y 7 km de longitud, con un número de vueltas fijado para completar una distancia total cercana a los 305 km (salvo excepciones). **Los puntos se reparten entre los 10 primeros clasificados**, según el siguiente orden: 25, 18, 15, 12, 10, 8, 6, 4, 2 y 1 punto, respectivamente. Al final de la temporada, el piloto y el equipo con más puntos se coronan campeón del mundo en su respectiva categoría.

Estructura de un Gran Premio.

Cada circuito acoge, de viernes a domingo, un **Gran Premio** que, en general, se estructura en tres partes principales: entrenamientos libres, clasificación y carrera.

Primero se celebran **tres sesiones de entrenamientos libres** (dos el viernes y una el sábado normalmente), de una hora cada una, donde los pilotos pueden rodar en pista para **probar el coche, ajustar su rendimiento y recopilar datos**. Cada circuito tiene características únicas (curvas, asfalto, clima, etc.), por lo que los ingenieros deben adaptar el monoplaza y realizar ajustes técnicos específicos.

Después, usualmente el sábado del Gran Premio, llega **la clasificación, que determina la posición de salida de cada piloto para la carrera del domingo**. Los pilotos compiten por marcar el mejor tiempo por vuelta y, el más rápido, logra la *pole position*, lo que le permite salir desde la primera posición.

Finalmente, el fin de semana concluye con **la carrera, donde los pilotos se miden en pista con el objetivo de sumar puntos** y los equipos aplican estrategias de neumáticos, energía, paradas y demás para lograr la mejor posición posible en la llegada a la meta.

Vuelta de formación.

Antes de que comience la carrera, los pilotos dan una **vuelta de formación**, en la que calientan los neumáticos y los frenos, y comprueban que todo funcione correctamente. Una vez completada la vuelta, cada monoplaza se coloca en su posición de salida en la parrilla. Tras unos segundos de espera, las luces del semáforo se apagan, señal de que la carrera ha comenzado y empieza la lucha por cruzar la meta en primer lugar.

Neumáticos.

Uno de los aspectos más importantes en la Fórmula 1 son los neumáticos. Por un lado, los coches alcanzan altísimas velocidades y deben recorrer una larga distancia durante la carrera, de modo que los neumáticos deben ser resistentes y eficientes. Al mismo tiempo, durante la clasificación, lo más importante es lograr el mejor tiempo en una sola vuelta, lo que exige alcanzar las máximas velocidades posibles.

Para equilibrar estas necesidades, en cada Gran Premio se asignan a los equipos diferentes juegos de neumáticos, divididos en tres compuestos para condiciones de seco (sin lluvia): duros, medios y

blandos. **Los neumáticos duros son los más resistentes al desgaste** y permiten rodar durante más vueltas, aunque ofrecen menos adherencia y rendimiento. En el otro extremo, **los neumáticos blandos son los más rápidos**, ideales para sesiones como la clasificación, pero con una degradación mucho mayor. **Los neumáticos medios representan un punto intermedio**, equilibrando durabilidad y rendimiento.

Durante la carrera, los equipos deben decidir cuidadosamente cuándo parar en *boxes* y qué tipo de neumático montar, ya que **el reglamento exige utilizar, como mínimo, dos compuestos diferentes**, lo que obliga a realizar, al menos, **una parada obligatoria**. Estas decisiones estratégicas son cruciales, especialmente cuando los coches tienen rendimientos muy similares. En muchas ocasiones, una buena elección de neumáticos y el momento preciso para cambiar pueden ser determinantes para lograr la victoria.

Aerodinámica del monoplaza

En Fórmula 1, el coche más rápido no es el que alcanza mayor velocidad en recta, sino el que completa las vueltas al circuito, formado por curvas y rectas, en el menor tiempo. Para ir más rápido en curva, se necesita mayor **carga aerodinámica**, que es la fuerza que *pega* el coche al suelo y mejora su agarre.

Sin embargo, al aumentar esa carga, también crece la **resistencia del aire**, lo que reduce la velocidad en rectas. Por eso, los equipos ajustan el coche según las características del circuito, usando elementos como los **alerones** y el **efecto suelo** para encontrar el **equilibrio ideal entre agarre y velocidad**.

DRS.

Otro aspecto clave en las carreras de Fórmula 1 es el **sistema DRS (*Drag Reduction System*)**. En efecto, en ciertas rectas del circuito se habilitan las llamadas **zonas de DRS**, en las cuales los pilotos pueden activar este sistema, ubicado en el alerón trasero del monoplaza, que reduce la resistencia al aire al abrir una compuerta, **permitiendo ganar velocidad en recta**.

Durante la carrera, el DRS solo se puede usar si el piloto se encuentra a menos de un segundo del coche que le precede en la **zona de detección**, ubicada antes que la de DRS, con el objetivo de **facilitar los adelantamientos**.

Sistema híbrido en la Fórmula 1.

Igualmente, los coches de Fórmula 1 utilizan un sistema híbrido, que combina un motor de combustión con un **sistema de recuperación de energía llamado ERS (*Energy Recovery System*)**. Este sistema aprovecha parte de la energía que normalmente se perdería en forma de calor o fricción, la convierte en electricidad y la almacena en una batería.

Además, dicha energía puede utilizarse más adelante para proporcionar **potencia extra al motor**. El ERS cuenta con dos componentes principales: el **MGU-K**, que recupera la energía cinética generada durante las frenadas; y el **MGU-H**, que recupera la energía térmica de los gases del escape.

