



Eulerianos



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

II Olimpiada Matemática Aplicada UPV

II OMA UPV 2024

18 de mayo de 2024

Instrucciones.

No está permitido el uso de calculadoras ni dispositivos electrónicos de ningún tipo. Las respuestas deben indicarse en la hoja de resultados de forma clara, de lo contrario no serán evaluadas. No es necesario indicar las magnitudes en la respuesta.

Esta prueba consta de 30 preguntas a resolver en un máximo tiempo de 2 horas y media en las que se calculará un resultado. La participación es anónima y objetiva. Los resultados deberán indicarse en la hoja de respuestas proporcionada, junto con el NIF o NIE y la fecha de nacimiento únicamente, donde no se permitirán tachones ni correcciones con tñpex, siendo anulada la respuesta en ese caso (se podrá solicitar otra hoja de resultados pero siempre habiendo roto previamente la anterior). Las soluciones deberán indicarse en bolígrafo de tinta azul o negra y de manera clara y legible. No se admitirán respuestas en lápiz.

Sí está permitido el uso de regla, cartabón, escuadra, compás y material de dibujo y para realizar los cálculos se facilitarán los folios necesarios. También se puede utilizar la última hoja de esta prueba.

Para determinar los ganadores se valorará, en primer lugar, el número de respuestas correctas (una pregunta no acertada no puntúa). En caso de empate, se premiará al participante más joven de los empatados. Se realizará una doble corrección para evitar cualquier tipo de error ya que los resultados finales serán inapelables.

Enunciados.

1. Nico y Adam están haciendo una competición para ver quién dice el número más grande. En un momento dado, se plantean la siguiente pregunta, ¿cuántas cifras tiene el número $16^{505} \cdot 3125^{404}$?
2. Cierta día, Daniela, una gran aficionada a la trigonometría, se encontraba en el metro de camino a clase cuando se planteó la siguiente cuestión: si x es un número real y $\sin(x) + \cos(x) = \frac{1}{2}$, ¿cuál es el valor de $\sin^3(x) + \cos^3(x)$? Expresa el resultado como fracción irreducible.
3. Manu, Pablo y Enrique estaban aburridos en clase un día y decidieron jugar al siguiente juego: tiraron consecutivamente tres dados (uno cada uno) y formaron con ellos un número A de tres cifras (la primera tirada dio las centenas, la segunda las decenas y la tercera las unidades). Repitieron el proceso, obteniendo otro número B de tres cifras. Como les gustan las matemáticas, se plantearon lo siguiente, ¿cuál es la probabilidad de que sea $A > B$? Expresa el resultado como fracción irreducible.
4. A Álex le encanta sumar fracciones egipcias. Un día, le propuso a su profesor el siguiente problema. Escribe

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2023 \cdot 2024}$$

como fracción irreducible.

5. Hugo, otro gran aficionado de las fracciones egipcias, escribe en una pizarra los números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2024}$. A continuación, toma dos de estos números, a y b , y los sustituye por el número $ab + a + b$. Hace esto hasta que solo queda un número. ¿Cuál es?
6. Mar y Martina han decidido pintar las caras de dos dados de rojo y azul. El primero ya lo han acabado y tiene 5 caras rojas y una cara azul. Ahora se preguntan, ¿cuántas caras rojas debe tener el segundo dado para que la probabilidad de obtener dos caras del mismo color al lanzarlos sea igual a $\frac{1}{2}$?
7. A Dani le encantan las divisiones, sin embargo, no le gusta que el resto sea distinto de cero. Por eso, quiere hallar el mayor entero n para el que $\frac{n^2-38}{n+1}$ es entero. ¿Cuál es?
8. Jaime y Juanma quedan todos los viernes por la noche para resolver sistemas de ecuaciones, lo cual es su pasión. Ayer estuvimos con ellos y nos plantearon lo siguiente: si $x + y = 18$ y $x^2 + y^2 = 212$, encuentra el valor de $|x^2 - y^2|$.
9. David le propuso a su compañero de piso Dani un reto. Le pidió que encontrara el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^{2024} \frac{5}{5 + 25^{\frac{k}{2025}}}.$$

10. Sea $\triangle PQR$ un triángulo rectángulo en R . La circunferencia con centro P y radio PR corta a PQ en S y la circunferencia con centro Q y radio QS corta a QR en T . Si T es el punto medio de QR , ¿cuál es el valor de QS/SP ? Expresa el resultado como fracción irreducible.

11. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en los reales tal que $f(1) = 1$ y, además, para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface lo siguiente:

- $f(x + 5) \geq f(x) + 5$ y
- $f(x + 1) \leq f(x) + 1$.

Si $g(x) = f(x) + 1 - x$, calcula $g(2024)$.

12. La mayor afición de Eric y de su gran amigo Rubén es quedar juntos para resolver ecuaciones de segundo grado. Ellos saben que las soluciones de $x^2 - 85x + c = 0$ son números primos, ¿cuánto vale c ?

13. ¿Cuál es el mayor entero positivo n tal que de 2^n divide a $2^{2024} + 10^{2024} + 100^{2024}$?

14. Inma y Amparo saben que el hexafluoruro de azufre, SF_6 , es un gas incoloro e inodoro muy poco reactivo. Para llevar a cabo una investigación, necesitan saber cuál es la presión (en atm) ejercida por 2 moles del gas en un recipiente de acero de 10 litros de volumen a 227°C . ¿Cuál es el resultado? Exprésalo con un decimal.

Nota 1. $R = 0,082 \frac{\text{atm}\cdot\text{l}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$.

Nota 2. $K = ^\circ\text{C} + 273$.

15. En una circunferencia consideramos cuatro puntos consecutivos en sentido antihorario A, B, C y D tales que los ángulos cumplen que $\angle BAC = 70^\circ$, $\angle ADB = 40^\circ$ y los segmentos satisfacen que $AD = 4$ y $BC = 6$. ¿Cuánto vale AC ?

16. Mario y Nico son grandes amantes de los logaritmos. El otro día, mientras jugaban a pádel, se preguntaron, ¿cuál es el menor natural n que verifica $\sum_{k=1}^n \log_{10}(k) > 3$?

17. Sea n un número natural con 1998 cifras que es divisible entre 9. Sea x la suma de sus dígitos, y la suma de los dígitos de x y z la suma de los dígitos de y . ¿Cuál es el valor de z ?

18. Ana y Pepe quieren diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral deciden usar un determinado material; pero para la base deben emplear otro material un 50% más caro por cm^2 . ¿Cuál debe ser la altura de este envase en cm para que su precio sea el menor posible?

19. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros satisfaciendo

$$P(21) = 17, P(32) = -247, P(37) = 33.$$

Sea $n \in \mathbb{Z}$ un número entero tal que $P(n) = n + 51$. ¿Cuánto vale n ?

20. La semana pasada Daniela quedó con sus amigas para comer *sushi* y les comentó la siguiente curiosidad sobre el pin de su teléfono móvil. Este coincide con la expresión simplificada de $\sqrt{60 \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 + 1}$, tomando la raíz positiva. ¿Cuál es el pin del móvil de Daniela?

21. Lidia empuja una caja de 10 kg sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. De repente, recibe una llamada de su hermano Abilio y suelta la caja, la cual comienza a descender por la pendiente por la acción de su peso. ¿Cuál

es la aceleración de la caja en su huida en m/s^2 , si no existe rozamiento?

Nota. Datos adicionales: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

22. Antonio José y Héctor quieren calcular el valor de la siguiente integral definida

$$\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos(x) dx,$$

expresando el resultado como fracción irreducible. ¿Cuál es la solución?

23. Fanny y Jaime tienen un depósito con un grifo de llenado y otro de vaciado. Sabemos que el grifo de llenado cumple su cometido cuando está abierto durante 12 horas y que, si el depósito está lleno y, abiertos los grifos de llenado y vaciado, este se vacía en 8 horas. Suponiendo que el depósito está lleno, ¿en cuánto tiempo se vaciará si el grifo de llenado está cerrado y el de vaciado abierto? El resultado debe expresarse en horas (puede no ser entero).

24. Sabiendo que $23 < e^\pi < 24$ y $\lceil e^\pi \rceil = \lceil \pi^e \rceil + 1$, ¿cuál es el valor de $\lfloor e^\pi \rfloor \cdot \lfloor \pi^e \rfloor \cdot 2^{\lfloor \pi \rfloor - 1}$?
Nota. $\lfloor \cdot \rfloor$ y $\lceil \cdot \rceil$ son las funciones suelo y techo, respectivamente. En general, $\lfloor x \rfloor$ nos da el entero más grande que es menor o igual que x y $\lceil x \rceil$ proporciona el valor del entero más pequeño que es mayor o igual que x . Por ejemplo, $\lfloor 4,5 \rfloor = 4$ y $\lceil 4,5 \rceil = 5$.

25. En un tren con capacidad máxima para 240 personas, se baja un sexto de los pasajeros en la primera parada, en la siguiente parada, se baja un quinto de los que quedan, en la siguiente, un cuarto de los que quedan y así, sucesivamente. En la sexta parada se bajan todos los que quedan. Teniendo en cuenta que no se sube nadie al tren en ninguna parada, ¿cuál es el número mínimo de pasajeros que puede tener el tren para que esto se cumpla?

26. Sea x un número verificando que $x + \frac{1}{x} = 1$. ¿Cuál es el valor de $x^9 + \frac{1}{x^9}$?

27. Adrián y Alberto tienen 14 barras de un metro de longitud y quieren situarlas en 5 tramos con la condición de que los tres primeros tengan longitud par y, los dos últimos, longitud impar. ¿De cuántas maneras lo podrán hacer?

28. Sea H un conjunto de n puntos en el plano con coordenadas enteras tales que cualesquiera tres de ellos no están alineados y forman un triángulo cuyo baricentro no tiene ninguna coordenada entera. ¿Cuál es el valor máximo posible de n ?

Nota. Dados tres puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) , su baricentro tiene coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right).$$

29. Daniela y Nico, dos niños de 30 kg y 40 kg, respectivamente, se encuentran sentados sobre un balancín formado por una barra de madera de peso despreciable. Sabiendo que Daniela se encuentra a dos metros del eje de giro, ¿dónde deberá sentarse Nico para que el balancín quede en equilibrio? Expresa la distancia en metros y con un decimal si es necesario.

Nota. Datos adicionales: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

30. Mar y Adam observan experimentalmente en su laboratorio que, en una reacción química, al duplicar la concentración del reactivo A , la velocidad de reacción es 4 veces mayor. ¿Cuál es el orden de reacción respecto a ese reactivo?

Nota. $v = k \cdot [A]^\alpha$ siendo v la velocidad, k la constante de velocidad, α el orden de la reacción respecto del reactivo A y $[A]$ la concentración de dicho reactivo.

Se puede utilizar esta hoja para realizar cálculos.